Probabilidad. Tema 2. Ejercicios

EJERCICIOS PROBABILIDAD SOLUCIÓN

2º CURSO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

VICTORIA RIVAS
CURSO 2016-2017

Problema 2.1 Demuestre, mediante las propiedades de las operaciones de sucesos, que para tres sucesos cualesquiera, A, B y C, se cumple que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Solución Utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos, podemos escribir:

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$

que, mediante la propiedad distributiva, resulta igual a:

$$\begin{aligned} &P(A) + P(B) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la propiedad anterior.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Problema 2.4 Un centro comercial sorteó un coche entre los clientes que habían acudido en el último mes. La familia ganadora no consigue ponerse de acuerdo con el color del cohe, por lo que el director del centro comercial les propone elegir uno del mismo color que una bola seleccionada al azar de una urna que contenga cuatro bolas con los posibles colores del coche: blanco, rojo, azul y negro. Si se definen los siguientes sucesos:

A_1 = «Elegir coche rojo o azul».
A_2 = «Elegir coche azul o negro».
A_3 = «Elegir coche negro o rojo».

¿Son independientes dos a dos? ¿Son mutuamente independientes los tres sucesos?

Solución Calculamos las probabilidades individuales de estos sucesos y las de sus intersecciones dos a dos mediante la regla de Laplace:

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

$$P(A_1 \cap A_2) = P(\text{azul}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(\text{rojo}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(\text{negro}) = \frac{1}{4}$$

Como $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, $\forall\, i,\, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$, entonces A_1, A_2 y A_3 son independientes dos a dos.

Para ver si son mutuamente independientes faltaría probar si la probabilidad de la intersección de los tres sucesos es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos. Como:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\phi) = 0 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

entonces estos tres sucesos no son mutuamente independientes.

Este ejemplo indica que:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall\, i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j \nRightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

es decir, la independencia de sucesos dos a dos no implica la mutua independencia de una familia de sucesos. También queda patente que los sucesos disjuntos no son independientes salvo que al menos uno de ellos sea el suceso imposible.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Problema 2.5 En una universidad española, el 8 % de los profesores titulares desempeñan cargos directivos, el 10 % pertenecen a alguna comisión, y únicamente el 4 % desempeña un cargo directivo y además pertenece a una comisión.

a) ¿Cuál es el porcentaje de profesores titulares que pertenecen a alguna comisión y no ostentan ningún cargo directivo?

b) Calcule el porcentaje de profesores titulares que no desempeñan ningún cargo ni pertenecen a ninguna comisión.

c) Si en la universidad hay 300 profesores titulares, ¿cuántos de ellos ostentan cargos directivos y no pertenecen a ninguna comisión?

d) ¿Qué porcentaje de profesores titulares con cargos directivos pertenecen a alguna comisión?

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Solución Definimos los sucesos C y D como:

C = «Un profesor titular pertenece a alguna comisión».
D = «Un profesor titular desempeña cargo directivo».

cuyas probabilidades son:

$$P(C) = 0{,}1$$
$$P(D) = 0{,}08$$
$$P(D \cap C) = 0{,}04$$

a) El porcentaje de profesores titulares que pertenecen a alguna comisión y no ostentan ningún cargo directivo es igual a:

$$100 \cdot P(C \cap \overline{D})$$

Para obtener esta probabilidad descomponemos el suceso C de la siguiente forma:

$$C = C \cap (D \cup \overline{D}) = (C \cap D) \cup (C \cap \overline{D})$$
$$P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \overline{D})$$

pues $C \cap D$ y $C \cap \overline{D}$ son sucesos disjuntos.

Así, se tiene:

$$P(C \cap \overline{D}) = P(C) - P(C \cap D) = 0{,}1 - 0{,}04 = 0{,}06$$

Por tanto, hay un 6 % de profesores titulares que pertenecen a alguna comisión y no desempeñan ningún cargo directivo.

b) En este caso se requiere calcular:

$$P(\overline{D} \cap \overline{C})$$

Utilizando una de las Leyes de Morgan, la probabilidad del suceso complementario y la probabilidad de la unión de sucesos, se tiene:

$$P(\overline{D} \cap \overline{C}) = P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D \cap C)] =$$
$$= 1 - [0{,}08 + 0{,}1 - 0{,}04] = 0{,}86$$

c) Del mismo modo que en el apartado *a*), podemos escribir:

$$P(D \cap \overline{C}) = P(D) - P(D \cap C) = 0{,}08 - 0{,}04 = 0{,}04$$

con lo cual, el número estimado de profesores tituales en estas circunstancias será:

$$300 \cdot 0{,}04 = 12$$

d) Se trata de obtener:

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}04}{0{,}08} = 0{,}5$$

El 50 % de los profesores titulares con cargos directivos pertenecen a alguna comisión.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Problema 2.6 Una empresa, que debe decidir si adquiere un determinado paquete de acciones, solicita un informe a tres asesores financieros para que se pronuncien de forma favorable o desfavorable a la compra. Por experiencias anteriores en operaciones similares, se sabe que los tres asesores tienen actitudes ante el riesgo diferentes e independientes. Esta situación se refleja en las probabilidades de aconsejar la compra en este tipo de operaciones, que son respectivamente 0,8, 0,5 y 0,3.

Con esta información a priori, calcule:

a) La probabilidad de que al menos uno de ellos aconseje la compra.

b) La probabilidad de que ninguno de ellos aconseje aquirir el paquete de acciones.

Solución Se definen los siguientes sucesos:

A = «El asesor A aconseja la compra».

B = «El asesor B aconseja la compra».

C = «El asesor C aconseja la compra».

cuyas probabilidades son:

$$P(A) = 0{,}8 \quad ; \quad P(B) = 0{,}5 \quad ; \quad P(C) = 0{,}3$$

a) Con las definiciones anteriores, $A \cup B \cup C$ representa el suceso «al menos uno de los tres aconseja la compra», cuya probabilidad se calcula utilizando la expresión vista en el ejercicio 2.1.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Como los sucesos son mutuamente independientes, estas probabilidades son:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0{,}24$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 0{,}15$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}12$$

Sustituyendo estas cantidades, tenemos:

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}24 - 0{,}15 + 0{,}12 = 0{,}93$$

b) En este caso debemos calcular:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$$

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Problema 2.7 Un departamento solicita dos colaboradores voluntarios entre los alumnos del último curso de carrera. La persona encargada de la selección no dispone de información relativa a los expedientes de los cinco candidatos presentados, por lo que decide elegirlos al azar.

Suponiendo que los expedientes de estos cinco alumnos son todos diferentes:

a) Calcule la probabilidad de que entre los dos elegidos se encuentre uno de los dos mejores expedientes y el peor de ellos.

b) Calcule la probabilidad de que haya sido elegido el alumno con mejor expediente.

c) Calcule la probabilidad de que se elija al menos uno de los dos alumnos con mejores expedientes.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Solución Como la selección es aleatoria, el número de posibilidades que se tienen para elegir los dos alumnos entre los cinco candidatos es:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

a) El número de posibles maneras de elegir el peor expediente y uno de los dos mejores es:

$$C_1^1 C_2^1 = \binom{1}{1}\binom{2}{1} = 2$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{elegir el peor expediente y uno de los dos mejores}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} =$$

$$= \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

b) El número de formas de elegir el alumno con mejor expediente es:

$$C_1^1 C_4^1 = \binom{1}{1}\binom{4}{1} = 4$$

y utilizando de nuevo la regla de Laplace:

$$P(\text{elegir el alumno con mejor expediente}) = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

c) Existen dos formas para elegir al menos uno de los dos alumnos con mejor expediente:

1. Elegir los dos mejores alumnos.
2. Elegir sólo uno de los dos mejores y el otro de los restantes (los tres peores).

Por tanto, el número de posibilidades que tenemos es:

$$C_2^2 C_3^0 + C_2^1 C_3^1 = \binom{2}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

y así,

$$P(\text{elegir al menos uno de los dos alumnos con mejor expediente}) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Problema 2.14 Una importante cadena de restaurantes de la costa levantina se plantea formalizar la solicitud de admisión en una asociación hostelera de prestigio. Para evaluar el nivel de calidad de sus paellas constituye un equipo de expertos que deben calificar como «aptas» o «no aptas» las seleccionadas para su inspección. Las clases de paella son:

Clase A: Con más de 300 g de marisco.

Clase B: Entre 100 y 300 g de marisco.

Clase C: Con menos de 100 g de marisco.

Los porcentajes de paellas preparadas de la clase B y C son, respectivamente, 30 y 50 %. Tras un mes de trabajo, el equipo presenta un informe en el que se contienen las siguientes conclusiones: «Se consideran como «aptas» el 20 % de las paellas de clase C, el 30 % de las de la clase B y el 40 % de las de la clase A».

a) Calcule la probabilidad de calificar como «apta» una paella cualquiera.

b) Suponiendo que una paella ha sido calificada «no apta», obtenga las probabilidades de que sea de cada una de las tres clases A, B y C.

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

Solución

Sean los sucesos:

A = «Una paella tiene más de 300 g de marisco».
B = «Una paella tiene entre 100 y 300 g de marisco».
C = «Una paella tiene menos de 100 g de marisco».
D = «Una paella es calificada como apta».

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(B) = 0{,}3 \quad ; \quad P(C) = 0{,}5 \quad ; \quad P(D/C) = 0{,}2 \quad ; \quad P(D/B) = 0{,}3 \quad ; \quad P(D/A) = 0{,}4$$

Como A, B y C forman un sistema completo de sucesos (una paella puede ser únicamente de uno de estos tres tipos), se tiene:

$$P(A) = 1 - P(B) - P(C) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$$

a) Según el Teorema de la Probabilidad Total, tenemos:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}27$$

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide

b) Las probabilidades que tiene una paella de ser de cada uno de los tres tipos suponiendo que la paella ha sido calificada como «no apta», se obtienen utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(A_i/\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}/A_i)\cdot P(A_i)}{P(\overline{D})} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

siendo A_i cada una de las clases (A, B, C).

Para calcular estas probabilidades, necesitamos las siguientes:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$$

$$P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$P(\overline{D}/B) = 0{,}7$$

$$P(\overline{D}/C) = 0{,}8$$

Por tanto:

$$P(A/\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}/A)\cdot P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}73} = \frac{0{,}12}{0{,}73} = 0{,}164$$

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}/B)\cdot P(B)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{0{,}73} = \frac{0{,}21}{0{,}73} = 0{,}288$$

$$P(C/\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}/C)\cdot P(C)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}5}{0{,}73} = \frac{0{,}40}{0{,}73} = 0{,}548$$

Fuente: Problemas de estadística. Descriptiva, probabilidad e inferencia. Autor: Casas, García. Ed. Pirámide